

## 4.1

a) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x + 3. \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ensimmäisen yhtälön mukaan  $y = 3x - 5$ . Sijoitetaan lauseke  $3x - 5$  toiseen yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan  $x$ .

$$\begin{array}{rcl} 3x - 5 = x + 3 & | & +5 \\ 3x = x + 8 & | & -x \\ 2x = 8 & | & :2 \\ x = 4 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 4$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{aligned} y &= x + 3 \\ &= 4 + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = 4$ .

Leikkauspiste on  $(4, 7)$ .

**b)** Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 5x + 2. \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ensimmäisen yhtälön mukaan  $y = 2x$ . Sijoitetaan lauseke  $2x$  toiseen yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan  $x$ .

$$\begin{array}{rcl} 2x & = & 5x + 2 \quad | -5x \\ -3x & = & 2 \quad | :(-3) \\ x & = & -\frac{2}{3} \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = -\frac{2}{3}$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{aligned} y &= 2x & \text{Sijoitetaan } x = -\frac{2}{3}. \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Leikkauspiste on  $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .

### Vastaus

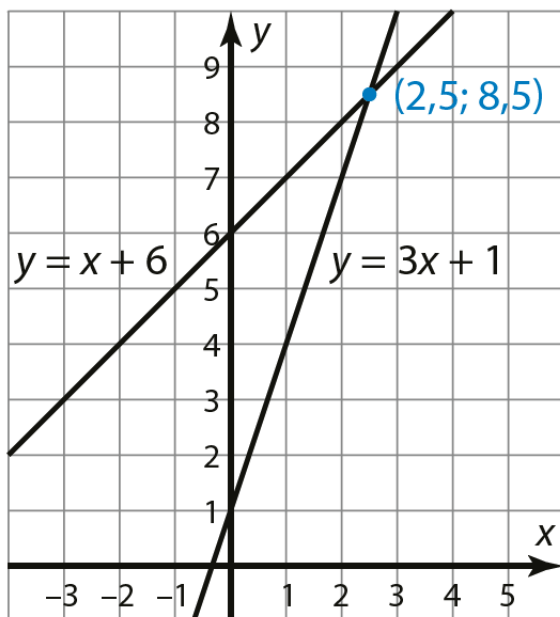
**a)**  $(4, 7)$

**b)**  $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

## 4.2

- a) Piirretään suorat syöttämällä suorien yhtälöt  $y = 3x + 1$  ja  $y = x + 6$  geometriaohjelmaan. Määritetään suorien leikkauspiste geometriaohjelmalla.

Leikkauspiste on  $(2,5; 8,5)$ .



**b)** Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x + 6. \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ensimmäisen yhtälön mukaan  $y = 3x + 1$ . Sijoitetaan lauseke  $3x + 1$  toiseen yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan  $x$ .

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= x + 6 & | -x - 1 \\ 2x &= 5 & | : 2 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = \frac{5}{2}$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{aligned} y &= x + 6 & \text{Sijoitetaan } x = \frac{5}{2}. \\ &= \frac{5}{2} + 6 \\ &= \frac{17}{2} \end{aligned}$$

Leikkauspiste on  $(\frac{5}{2}, \frac{17}{2})$ .

### Vastaus

**a)** (2,5; 8,5)

**b)**  $(\frac{5}{2}, \frac{17}{2})$

## 4.3

a) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $y$  ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 3x - y = 3 \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x = 8 \quad |:4 \\ x = 2 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.

Muuttuja  $y$  poistuu.

Ratkaistaan muuttuja  $x$ .

Sijoitetaan  $x = 2$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$x + y = 5$$

$$2 + y = 5 \quad |-2$$

$$y = 3$$

Sijoitetaan  $x = 2$ .

Leikkauspiste on  $(2, 3)$ .

b) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} x + 4y = -1 \\ -x - 3y = 2. \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $x$  ja ratkaistaan muuttuja  $y$ .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 4y = -1 \\ -x - 3y = 2 \end{cases} \\ + \\ \hline y = 1 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.

Muuttuja  $x$  poistuu.

Ratkaistaan muuttuja  $y$ .

Sijoitetaan  $y = 1$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$x + 4y = -1$$

Sijoitetaan  $y = 1$ .

$$x + 4 \cdot 1 = -1$$

$$x + 4 = -1 \quad | -4$$

$$x = -5$$

Leikkauspiste on  $(-5, 1)$ .

### Vastaus

a)  $(2, 3)$

b)  $(-5, 1)$

## 4.4

a) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $y$  ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases} \\ \hline 7x = 21 \quad | : 7 \\ x = 3 \end{array}$$

Kerrotaan alempi yhtälö sellaisella luvulla, että muuttujan  $y$  kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

Lasketaan yhtälöt yhteen.  
Muuttuja  $y$  poistuu.  
Ratkaistaan muuttuja  $x$ .

Sijoitetaan  $x = 3$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 17 \\ 3 \cdot 3 + 2y = 17 \\ 9 + 2y = 17 \quad | -9 \\ 2y = 8 \quad | : 2 \\ y = 4 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 3$ .

Leikkauspiste on  $(3, 4)$ .

b) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $x$  ja ratkaistaan muuttuja  $y$ .

$$\begin{cases} y = x + 1 & | -x \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Muokataan ylempi yhtälö niin, että muuttujan  $x$  kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -x + y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \\ + \\ \hline 3y = 6 \quad | :3 \\ y = 2 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.

Muuttuja  $x$  poistuu.

Ratkaistaan muuttuja  $y$ .

Sijoitetaan  $y = 2$  jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$x + 2y = 5$$

Sijoitetaan  $y = 2$ .

$$x + 2 \cdot 2 = 5$$

$$x + 4 = 5 \quad | -4$$

$$x = 1$$

Leikkauspiste on  $(1, 2)$ .

**Vastaus**

**a)**  $(3, 4)$

**b)**  $(1, 2)$

## 4.5

a) Ratkaistaan suoran  $y = 2x - 9$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$y = 2x - 9$$

$$0 = 2x - 9 \quad | +9$$

$$9 = 2x \quad | :2$$

$$x = \frac{9}{2}$$

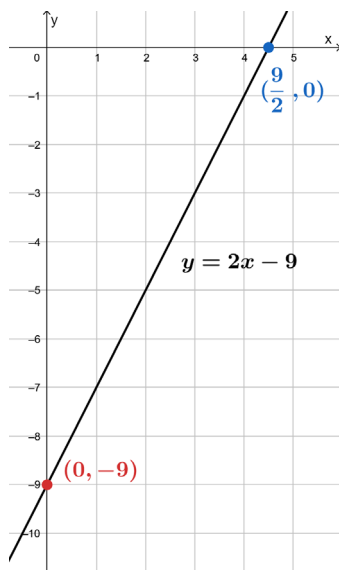
Sijoitetaan  $y = 0$  ja  
ratkaistaan  $x$ .

Siirretään  $x$  vasemmalle.

Leikkauspiste on  $(\frac{9}{2}, 0)$ .

Päätellään suoran  $y = 2x - 9$  ja  $y$ -akselin leikkauspiste suoran yhtälöstä.

Koska suoran yhtälön vakiotermi on  $-9$ , niin leikkauspiste on  $(0, -9)$ .



b) Ratkaistaan suoran  $-2x + 4y = 6$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$-2x + 4y = 6$$

$$-2x + 4 \cdot 0 = 6$$

$$-2x = 6 \quad |: (-2)$$

$$x = -3$$

Leikkauspiste on  $(-3, 0)$ .

Sijoitetaan  $y = 0$  ja ratkaistaan  $x$ .

Ratkaistaan suoran  $-2x + 4y = 6$  ja  $y$ -akselin leikkauspiste.

$$-2x + 4y = 6$$

$$-2 \cdot 0 + 4y = 6$$

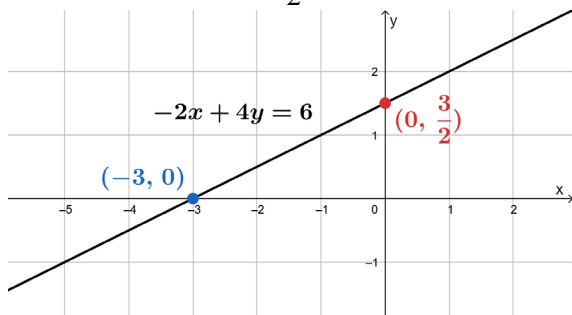
$$4y = 6 \quad |: 4$$

$$y = \frac{\cancel{6}^3}{\cancel{4}_2}$$

$$y = \frac{3}{2}$$

Sijoitetaan  $x = 0$  ja ratkaistaan  $y$ .

Leikkauspiste on  $(0, \frac{3}{2})$ .



**Vastaus**

a)  $(\frac{9}{2}, 0)$  ja  $(0, -9)$

b)  $(-3, 0)$  ja  $(0, \frac{3}{2})$

## 4.6

Ratkaistaan suoran  $x - 4y = 12$  ja  $y$ -akselin leikkauspiste.

Sijoitetaan ensin  $x = 0$  yhtälöön  $x - 4y = 12$ .

Saadaan  $0 + 4y = 12$  (vaihtoehto a).

Määritetään yhtälön ratkaistu muoto.

$$0 - 4y = 12$$

$$-4y = 12 \quad |: (-4) \quad (\text{vaihtoehto e})$$

$$y = -3$$

Leikkauspiste on  $(0, -3)$  (vaihtoehto g).

### Vastaus

a, e ja g

## 4.7

Applettia tutkimalla saadaan selville, että suorat  $x - 5 = 0$  ja  $3x + 10y - 20 = 0$  leikkaavat pisteessä  $(4; 0,8)$ .

Varmistetaan tulos laskemalla.

Sijoitetaan  $(4; 0,8)$  yhtälöön  $x - 5y = 0$ .

$$x - 5y = 0$$

Sijoitetaan  $x = 4$  ja  
 $y = 0,8$ .

$$4 - 5 \cdot 0,8 = 0$$

$$4 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

tosi

Sijoitetaan sitten  $(4; 0,8)$  yhtälöön  $3x + 10y - 20 = 0$ .

$$3x + 10y - 20 = 0$$

Sijoitetaan  $x = 4$  ja  
 $y = 0,8$ .

$$3 \cdot 4 + 10 \cdot 0,8 - 20 = 0$$

$$12 + 8 - 20 = 0$$

$$0 = 0$$

tosi

Koordinaatit toteuttavat molempien suorien yhtälöt, joten molemmat suorat kulkevat pisteen  $(4; 0,8)$  kautta, eli leikkaavat kyseisessä pisteessä.

**Vastaus**

$(4; 0,8)$

## 4.8

a) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad | \cdot 3$$

Poistetaan nimittäjät  
kertomalla yhtälön  
molemmat puolet  
luvulla 3.

$$\begin{aligned} \cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}x + \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} &= \cancel{3} \cdot \left( -\frac{1}{\cancel{3}}x \right) + \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} \\ 2x + 1 &= -x + 4 & | +x - 1 \\ 3x &= 3 & | : 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = 1$  ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Sijoitetaan  $x = 1$ .

$$= \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} = 1$$

Leikkauspiste on  $(1, 1)$ .

b) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = \frac{1}{2}x + 1$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$2x + 4y = 6$$

$$\text{Sijoitetaan } y = \frac{1}{2}x + 1.$$

$$2x + 4 \cdot \left( \frac{1}{2}x + 1 \right) = 6$$

$$2x + 2x + 4 = 6 \quad | -4$$

$$4x = 2 \quad |:4$$

$$x = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{1}{2}$$

Sijoitetaan  $x = \frac{1}{2}$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$2x + 4y = 6$$

$$\text{Sijoitetaan } x = \frac{1}{2}.$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4y = 6$$

$$1 + 4y = 6 \quad | -1$$

$$4y = 5 \quad |:4$$

$$y = \frac{5}{4}$$

Leikkauspiste on  $\left( \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right)$ .

### Vastaus

a)  $(1, 1)$

b)  $\left( \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right)$

## 4.9

Muodostetaan lentoreittejä kuvaavien suorien yhtälöt.

Suora  $s$  kulkee pisteen  $(50, 8)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $-3$ .

$$\begin{aligned}y - y_0 &= k(x - x_0) & y_0 = 8, k = -3 \text{ ja } x_0 = 50 \\y - 8 &= -3(x - 50) & \text{Ratkaistaan muuttuja } y. \\y - 8 &= -3x + 150 & | +8 \\y &= -3x + 158\end{aligned}$$

Suoran  $s$  yhtälö on  $y = -3x + 158$ .

Suora  $t$  kulkee pisteen  $(12, 10)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $4$ .

$$\begin{aligned}y - y_0 &= k(x - x_0) & y_0 = 10, k = 4 \text{ ja } x_0 = 12 \\y - 10 &= 4(x - 12) & \text{Ratkaistaan muuttuja } y. \\y - 10 &= 4x - 48 & | +10 \\y &= 4x - 38\end{aligned}$$

Suoran  $t$  yhtälö on  $y = 4x - 38$ .

Ratkaistaan suorien leikkauspiste.

$$\begin{cases} y = -3x + 158 \\ y = 4x - 38 \end{cases} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 28 \text{ ja } y = 74$$

Suorien leikkauspiste eli piste, jossa lentoreitit leikkaavat toisensa, on  $(28, 74)$ .

**Vastaus**

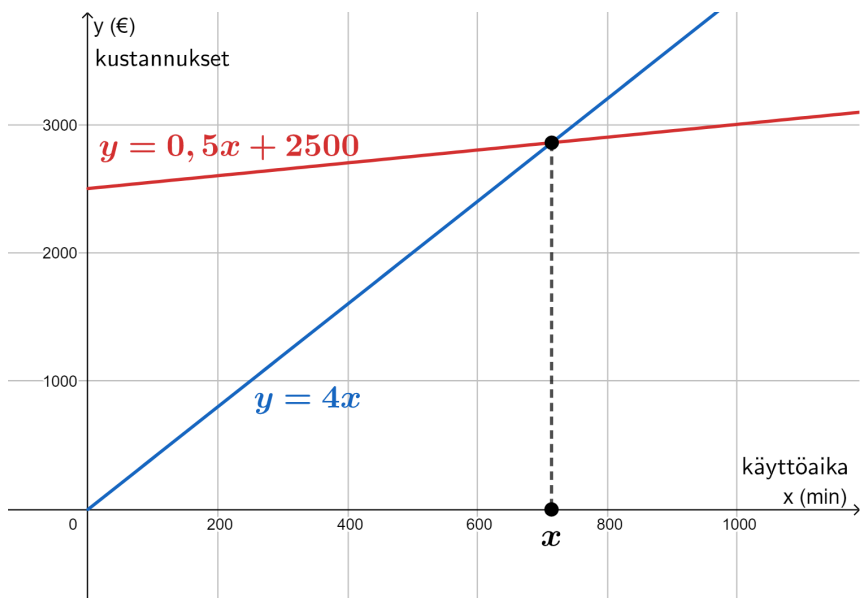
$(28, 74)$

## 4.10

Olkoon muuttuja  $x$  käyttöaika minuutteina ja muuttuja  $y$  kustannukset euroina.

Jos vuosimaksua ei makseta, jokainen minuutti maksaa 4 €. Kustannuksia kuvaa tällöin suora  $y = 4x$ .

Jos maksaa 2500 €:n vuosimaksun, jokainen minuutti maksaa 0,50 €. Kustannuksia kuvaa tällöin suora  $y = 0,5x + 2500$ .



Mallikuvan perusteella vuosimaksun maksaminen kannattaa suorien leikkauskohdan  $x$  jälkeen.

Ratkaistaan  $x$  yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 4x \\ y = 0,5x + 2500 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 714,3 \text{ ja } y \approx 2857,1$$

Vuosimaksun maksaminen kannattaa, kun tietokantaa käyttää enemmän kuin 714,3 minuuttia, eli vähintään 715 minuuttia vuodessa.

**Vastaus**

vähintään 715 minuuttia

## 4.11

a) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 3. \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ensimmäisen yhtälön mukaan  $y = 2x$ . Sijoitetaan lauseke  $2x$  toiseen yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan  $x$ .

$$\begin{aligned} 2x &= x + 3 & | -x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $x = 3$  ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{aligned} y &= 2x & \text{Sijoitetaan } x = 3. \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on  $(3, 6)$ .

b) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 4. \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ensimmäisen yhtälön mukaan

$y = \frac{1}{3}x + 2$ . Sijoitetaan lauseke  $\frac{1}{3}x + 2$  toiseen yhtälöön muuttujan  $y$  paikalle ja ratkaistaan  $x$ .

$$\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{2}x + 4 \quad | \cdot 6$$

Poistetaan nimittäjät  
kertomalla yhtälön  
molemmat puolet  
luvulla 6.

$$\overset{2}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}x + 6 \cdot 2 = \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}x + 6 \cdot 4$$

$$2x + 12 = 3x + 24 \quad | -3x - 12$$

$$-x = 12 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = -12$$

Sijoitetaan  $x = -12$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

Sijoitetaan  $x = -12$ .

$$= \frac{1}{2} \cdot (-12) + 4$$

$$= -6 + 4$$

$$= -2$$

Leikkauspiste on  $(-12, -2)$ .

### Vastaus

a) (3, 6)

b)  $(-12, -2)$

## 4.12

a) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ x + 4y = 7. \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $y$  ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\begin{cases} 4x - 2y = 10 & | \cdot 2 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö sellaisella luvulla, että muuttujan  $y$  kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 8x - 4y = 20 \\ + \quad x + 4y = 7 \end{cases} \\ \hline 9x = 27 \quad | : 9 \\ x = 3 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.  
Muuttuja  $y$  poistuu.  
Ratkaistaan muuttuja  $x$ .

Sijoitetaan  $x = 3$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{array}{r} x + 4y = 7 \\ 3 + 4y = 7 \quad | -3 \\ 4y = 4 \quad | : 4 \\ y = 1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = 3$ .

Leikkauspiste on  $(3, 1)$ .

b) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $y$  ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\begin{cases} 3x + y = -2 & | \cdot (-3) \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö sellaisella luvulla, että muuttujan  $y$  kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -9x - 3y = 6 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \\ + \\ \hline -7x = 7 \quad | : (-7) \\ x = -1 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.  
Muuttuja  $y$  poistuu.  
Ratkaistaan muuttuja  $x$ .

Sijoitetaan  $x = -1$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 1 \\ 2 \cdot (-1) + 3y = 1 \\ -2 + 3y = 1 \quad | +2 \\ 3y = 3 \quad | : 3 \\ y = 1 \end{array}$$

Sijoitetaan  $x = -1$ .

Leikkauspiste on  $(-1, 1)$ .

### Vastaus

a)  $(3, 1)$

b)  $(-1, 1)$

## 4.13

a) Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} x - 2y - 10 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Käytetään yhteenlaskumenetelmää. Poistetaan yhtälöparista muuttuja  $y$  ja ratkaistaan muuttuja  $x$ .

$$\begin{cases} x - 2y - 10 = 0 \quad | \cdot 2 \\ x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö sellaisella luvulla, että muuttujan  $y$  kertoimiksi saadaan toistensa vastaluvut.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x - 4y - 20 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \\ + \\ \hline 3x - 27 = 0 \quad | +27 \\ 3x = 27 \quad | :3 \\ x = 9 \end{array}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen.  
Muuttuja  $y$  poistuu.  
Ratkaistaan muuttuja  $x$ .

Sijoitetaan  $x = 9$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{array}{r} 9 + 4y - 7 = 0 \\ 4y + 2 = 0 \quad | -2 \\ 4y = -2 \quad | :4 \\ y = -\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Leikkauspiste on  $(9, -\frac{1}{2})$ .

**b)** Tehtävänä on löytää luvut  $x$  ja  $y$ , jotka toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ 5x - 3y = 1. \end{cases}$$

Käytetään sijoitusmenetelmää. Ensimmäisen yhtälön mukaan  $x = 2y + 3$ . Sijoitetaan lauseke  $2y + 3$  toiseen yhtälöön muuttujan  $x$  paikalle ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 1 && \text{Sijoitetaan } x = 2y + 3. \\ 5 \cdot (2y + 3) - 3y &= 1 && \text{avataan sulkeet} \\ 10y + 15 - 3y &= 1 \\ 7y + 15 &= 1 && | -15 \\ 7y &= -14 && |: 7 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan  $y = -2$  ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$\begin{aligned} x &= 2y + 3 && \text{Sijoitetaan } y = -2. \\ &= 2 \cdot (-2) + 3 \\ &= -4 + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on  $(-1, -3)$ .

### Vastaus

**a)**  $(9, -\frac{1}{2})$

**b)**  $(-1, -3)$

## 4.14

a) Ratkaistaan suoran  $y = \frac{1}{2}x - 7$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$y = \frac{1}{2}x - 7$$

Sijoitetaan  $y = 0$  ja  
ratkaistaan  $x$ .

$$0 = \frac{1}{2}x - 7 \quad | +7$$

$$7 = \frac{1}{2}x \quad | \cdot 2$$

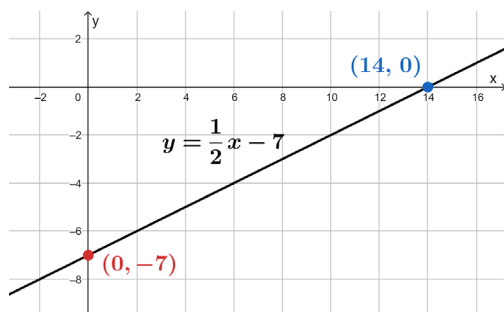
Siirretään  $x$  vasemmalle.

$$x = 14$$

Leikkauspiste on  $(14, 0)$ .

Päätellään suoran  $y = \frac{1}{2}x - 7$  ja  $y$ -akselin leikkauspiste suoran yhtälöstä.

Koska suoran yhtälön vakiotermi on  $-7$ , niin leikkauspiste on  $(0, -7)$ .



**b)** Ratkaistaan suoran  $6x - y = 12$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$6x - y = 12$$

Sijoitetaan  $y = 0$  ja ratkaistaan  $x$ .

$$6x - 0 = 12$$

$$6x = 12 \quad | :6$$

$$x = 2$$

Leikkauspiste on  $(2, 0)$ .

Ratkaistaan suoran  $6x - y = 12$  ja  $y$ -akselin leikkauspiste.

$$6x - y = 12$$

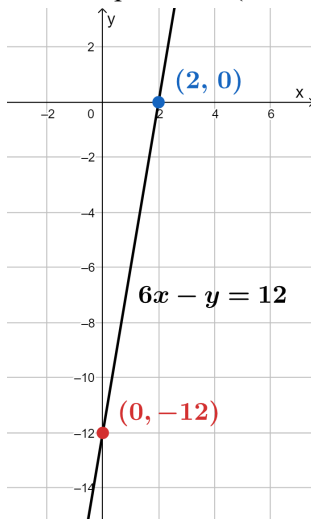
Sijoitetaan  $x = 0$  ja ratkaistaan  $y$ .

$$6 \cdot 0 - y = 12$$

$$-y = 12 \quad | \cdot (-1)$$

$$y = -12$$

Leikkauspiste on  $(0, -12)$ .



**Vastaus**

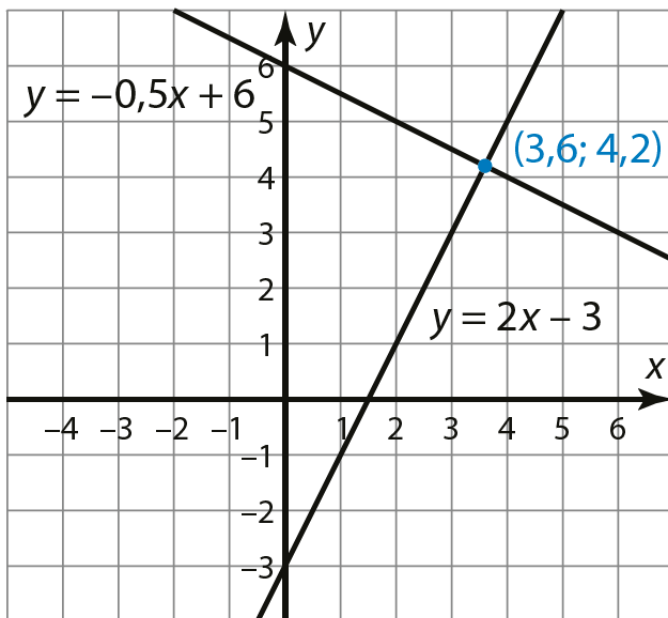
**a)**  $(0, -7)$  ja  $(14, 0)$

**b)**  $(0, -12)$  ja  $(2, 0)$

## 4.15

- a) Piirretään suorat syöttämällä suorien yhtälöt  $y = -\frac{1}{2}x + 6$  ja  $y = 2x - 3$  geometriaohjelmaan. Määritetään suorien leikkauspiste geometriaohjelmalla.

Leikkauspiste on  $(3,6; 4,2)$ .



b) Selvitetään, mitkä luvut  $x$  ja  $y$  toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 6 \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = 2x - 3$  ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 6 \quad | +\frac{1}{2}x + 3$$

$$\frac{5}{2}x = 9 \quad | \cdot \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{18}{5}$$

Sijoitetaan  $x = \frac{18}{5}$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$y = 2x - 3$$

$$\text{Sijoitetaan } x = \frac{18}{5}.$$

$$= 2 \cdot \frac{18}{5} - 3$$

$$= \frac{36}{5} - 3$$

$$= \frac{21}{5}$$

Leikkauspiste on  $(\frac{18}{5}, \frac{21}{5})$ .

### Vastaus

a) (3,6; 4,2)

b)  $(\frac{18}{5}, \frac{21}{5})$

## 4.16

Ratkaistaan suorien  $y = 3x - 1$  ja  $4x - y = 0$  leikkauspiste.

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = 3x - 1$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$4x - (3x - 1) = 0 \quad \text{vaihtoehto c}$$

$$4x - 3x + 1 = 0 \quad | -1$$

$$x = -1 \quad \text{vaihtoehto e}$$

Sijoitetaan  $x = -1$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$4 \cdot (-1) - y = 0 \quad \text{vaihtoehto i}$$

$$-4 - y = 0 \quad | +4$$

$$-y = 4 \quad | \cdot (-1)$$

$$y = -4 \quad \text{vaihtoehto j}$$

**Vastaus**

c, e, i ja j

## 4.17

- a) Appletilla nähdään, että suora  $6x - 5y + 2 = 0$  leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $(-0,3; 0)$  ja  $y$ -akselin pisteessä  $(0; 0,4)$ .

- b) Ratkaistaan suoran  $6x - 5y + 2 = 0$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$6x - 5y + 2 = 0$$

Sijoitetaan  $y = 0$  ja ratkaistaan  $x$ .

$$6x - 5 \cdot 0 + 2 = 0$$

$$6x + 2 = 0 \quad | -2$$

$$6x = -2 \quad |:6$$

$$x = -\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{6}}} = -\frac{1}{3}$$

Leikkauspiste on  $(-\frac{1}{3}, 0)$ .

Ratkaistaan suoran  $6x - 5y + 2 = 0$  ja  $y$ -akselin leikkauspiste.

$$6x - 5y + 2 = 0$$

Sijoitetaan  $x = 0$  ja ratkaistaan  $y$ .

$$6 \cdot 0 - 5y + 2 = 0$$

$$-5y + 2 = 0 \quad | -2$$

$$-5y = -2 \quad | :(-5)$$

$$y = \frac{2}{5}$$

Leikkauspiste on  $(0, \frac{2}{5})$ .

### Vastaus

- a)  $(-0,3; 0)$  ja  $(0; 0,4)$

- b)  $(-\frac{1}{3}, 0)$  ja  $(0, \frac{2}{5})$

## 4.18

Määritetään pisteiden  $(3, 1)$  ja  $(7, -1)$  kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$\begin{aligned}k &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\&= \frac{-1 - 1}{7 - 3} \\&= -\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \\&= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sijoitetaan  $y_2 = -1$ ,  $y_1 = 1$ ,  
 $x_2 = 7$  ja  $x_1 = 3$ .

Kysytty suora on yhdensuuntainen pisteiden  $(3, 1)$  ja  $(7, -1)$  kautta kulkevan suoran kanssa, joten sillä on sama kulmakerroin.

Suora kulkee pisteen  $(6, -5)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $-\frac{1}{2}$ .

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y_0 = -5, k = -\frac{1}{2} \text{ ja } x_0 = 6$$

$$y - (-5) = -\frac{1}{2}(x - 6)$$

Ratkaistaan muuttuja  $y$ .

$$y + 5 = -\frac{1}{2}x + 3 \quad | -5$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2$$

- a) Koska suoran yhtälön  $y = -\frac{1}{2}x - 2$  vakiotermi on  $-2$ , niin leikkauspiste on  $(0, -2)$ .

**b)** Ratkaistaan suorien  $y = -\frac{1}{2}x - 2$  ja  $x = -6$  leikkauspiste.

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - 2, \\ x = -6 \end{cases}$$

Sijoitetaan  $x = -6$  ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x - 2 && \text{Sijoitetaan } x = -6. \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-6) - 2 \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on  $(-6, 1)$ .

**c)** Ratkaistaan suoran  $y = -\frac{1}{2}x - 2$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x - 2 && \text{Sijoitetaan } y = 0 \text{ ja} \\ &&& \text{ratkaistaan } x. \\ 0 &= -\frac{1}{2}x - 2 \quad | +\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x &= -2 \quad | \cdot 2 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on  $(-4, 0)$ .

d) Ratkaistaan suorien  $y = -\frac{1}{2}x - 2$  ja  $y = 6$  leikkauspiste.

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - 2, \\ y = 6 \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = 6$  ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$y = -\frac{1}{2}x - 2$$

Sijoitetaan  $y = 6$ .

$$6 = -\frac{1}{2}x - 2 \quad | +\frac{1}{2}x - 6$$

$$\frac{1}{2}x = -8 \quad | \cdot 2$$

$$x = -16$$

Leikkauspiste on  $(-16, 6)$ .

### Vastaus

a)  $(0, -2)$

b)  $(-6, 1)$

c)  $(-4, 0)$

d)  $(-16, 6)$

## 4.19

Muodostetaan sähkölinjaa kuvaavan suoran yhtälö. Suora kulkee pisteen  $(-3, 1)$  kautta ja sen kulmakerroin on  $-\frac{2}{3}$ .

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y_0 = 1, k = -\frac{2}{3} \text{ ja } x_0 = -3$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - (-3))$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 3)$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}x - 2 \quad | +1$$

$$y = -\frac{2}{3}x - 1$$

**a)** Ratkaistaan sähkölinjan ja maantien, eli suoran  $x = -2$ , leikkauspiste.

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -2 \text{ ja } y = \frac{1}{3}$$

Leikkauspiste on  $(-2, \frac{1}{3})$ .

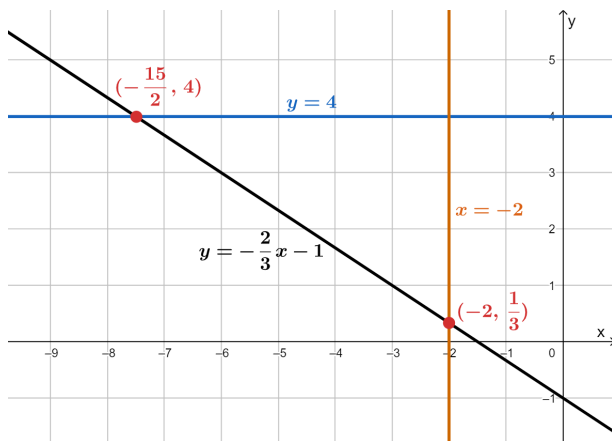
b) Lasketaan sähkölinjan ja joen, eli suoran  $y = 4$ , leikkauspiste.

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = -\frac{15}{2} \text{ ja } y = 4$$

Leikkauspiste on  $(-\frac{15}{2}, 4)$ .

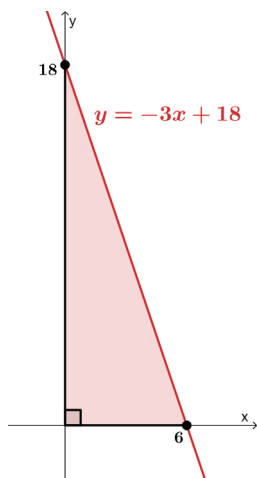


**Vastaus**

a)  $(-2, \frac{1}{3})$

b)  $(-\frac{15}{2}, 4)$

## 4.20



Alue on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet voidaan selvittää suoran ja koordinaatiston akselien leikkauspisteiden avulla.

Suora  $y = -3x + 18$  leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, 18)$ .

Kolmion  $y$ -akselin suuntaisen kateetin pituus on  $18 \cdot 50 \text{ m} = 900 \text{ m}$ .

Ratkaistaan suoran  $y = -3x + 18$  ja  $x$ -akselin leikkauspiste.

$$0 = -3x + 18$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 6$$

Leikkauspiste on  $(6, 0)$ .

Kolmion  $x$ -akselin suuntaisen kateetin pituus on  $6 \cdot 50 \text{ m} = 300 \text{ m}$ .

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$\frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 900 = 135\,000 \text{ (m}^2\text{)} \qquad A = \frac{1}{2}ah$$

Muutetaan pinta-ala hehtaareiksi ja pyöristetään tehtävänannon tarkkuuteen.

$$135\,000 \text{ m}^2 = 13,5 \text{ ha} \approx 14 \text{ ha}$$

**Vastaus**

14 ha

## 4.21

Selvitetään ensin, missä pisteessä suorat  $y = x + 21$  ja  $2x + y + 6 = 0$  leikkaavat.

Muodostetaan yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} y = x + 21 \\ 2x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan  $y = x + 21$  toiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $x$ .

$$2x + (x + 21) + 6 = 0$$

$$2x + x + 21 + 6 = 0$$

$$3x + 27 = 0 \quad | -27$$

$$3x = -27 \quad |:3$$

$$x = -9$$

Sijoitetaan  $x = -9$  ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan  $y$ .

$$y = x + 21$$

$$= -9 + 21$$

$$= 12$$

Sijoitetaan  $x = -9$ .

Leikkauspiste on  $(-9, 12)$ .

Suorien on siis leikattava pisteessä  $(-9, 12)$ . Selvitetään, millä muuttujan  $a$  arvoilla kolmas suora kulkee tämän pisteen kautta.

Sijoitetaan  $x = -9$  ja  $y = 12$  kolmannen suoran yhtälöön  $y = ax - 15$ .

$$y = ax - 15$$

Sijoitetaan  $y = 12$  ja  
 $x = -9$ .

$$12 = a \cdot (-9) - 15$$

$$12 = -9a - 15 \quad | +9a - 12$$

$$9a = -27 \quad |:9$$

$$a = -3$$

Kaikki kolme suoraa kulkevat pisteen  $(-9, 12)$  kautta, kun  $a = -3$ .

### **Vastaus**

$a = -3$ , leikkauspiste  $(-9, 12)$